

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 1

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

20 Μαρτίου 2025

Θεωρήστε το σύστημα ενός απλού εκκρεμούς με ροπή εισόδου, η εξίσωση του οποίου έπειτα από γραμμικοποίηση ($\sin(q) \approx q$ για μικρές γωνίες q) δίνεται από την σχέση:

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t), \quad (1)$$

όπου $q(t)$ [rad] η γωνία εκτροπής του εκκρεμούς, m [kg], L [m] η μάζα και το μήκος του εκκρεμούς, αντίστοιχα, c [N · m · sec] ένας σταθερός συντελεστής απόσβεσης, g [m/sec²] η επιτάχυνση της βαρύτητας, και $u(t)$ [N · m] μια είσοδος ελέγχου.

Θέμα 1 (2 μονάδες)

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος στη μορφή $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, όπου το διάνυσμα κατάστασης ορίζεται ως $x(t) = [q(t) \dot{q}(t)]^T$, καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς θεωρώντας ως έξοδο του συστήματος την γωνία $q(t)$.

β) Προσομοιώστε την απόκριση του συστήματος με κάποια συνάρτηση ODE solver του Matlab, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, είσοδο $u(t) = A_0 \sin(\omega t)$, $\forall t \geq 0$, και $m = 0.75$, $L = 1.25$, $c = 0.15$, $g = 9.81$, $A_0 = 4$, $\omega = 2$. Να εκτελέσετε χρόνο προσομοίωσης 20 [sec] με κατάλληλο βήμα ολοκλήρωσης ($\Delta t < 10^{-3}$ [sec]) για ακριβή αποτελέσματα. Να δημιουργηθούν οι γραφικές παραστάσεις των καταστάσεων του συστήματος.

Θέμα 2 (5 μονάδες)

α) Θεωρήστε πως το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ και η είσοδος ελέγχου $u(t)$ είναι μετρήσιμα. Χρησιμοποιήστε δείγματα με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0.1$ [sec] από το διάστημα προσομοίωσης, και εφαρμόστε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων m , L και c . Προσομοιώστε την απόκριση του συστήματος χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων που προέκυψαν και δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των $q(t)$, $\hat{q}(t)$ καθώς και της διαφοράς τους $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

β) Να εφαρμόσετε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας μετρήσιμα μόνο την γωνία $q(t)$ και την είσοδο $u(t)$. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Θέμα 3 (3 μονάδες)

α) Να προστεθεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος στα δεδομένα δειγματοληψίας και να υπολογιστούν οι νέες εκτιμήσεις των παραμέτρων. Να συγκριθούν τα αποτελέσματα με και χωρίς θόρυβο.

β) Να μελετηθεί η επίδραση της μεταβολής της περιόδου δειγματοληψίας $T_s > 0$ στην ακρίβεια των εκτιμώμενων παραμέτρων. Να δημιουργηθούν γραφήματα που να δείχνουν το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων σε συνάρτηση με την περίοδο δειγματοληψίας. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

γ) Να μελετηθεί η επίδραση της μεταβολής του πλάτους A_0 της εισόδου στην ακρίβεια των εκτιμώμενων παραμέτρων (διατηρώντας σταθερή περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0.1$ [sec]). Να δημιουργηθούν γραφήματα που να δείχνουν το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων σε συνάρτηση με το πλάτος της εισόδου. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Σημειώσεις

- Να παραδώσετε: (i) αναφορά (pdf) στην οποία θα καταγράψετε όλα τα αποτελέσματα συνοδευόμενα από τις όποιες παρατηρήσεις/συμπεράσματα, (ii) όλους του κώδικες (m-files) που αναπτύξατε.
- Να ανεβάσετε στο elearning ένα συμπιεσμένο αρχείο με ονομασία: 'Lastname_Firstname_AEM_lab01'.
- Προθεσμία υποβολής: έως και Πέμπτη 03/04/25.